Geometria I - SECONDO TEST

24 luglio 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forma bilineare tale che per ogni $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3)$, $k \in \mathbb{R}$:

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = 2x_1y_1 + kx_1y_2 + kx_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + kx_2y_3 + kx_3y_2.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali f è un prodotto scalare.
[$\forall k \in \mathbb{R}$] $\boxed{1}$

(b) Determinare i valori di k per i quali la forma quadratica associata a f è definita positiva. [$\nexists k \in \mathbb{R}$] $\boxed{3}$

(c) Posto $k = 0$, e dato $\vec{v} = (3, 2, 1)$, determinare la dimensione e una base per $X = \vec{v}^{\perp}$ e per $Y = \left(\vec{v}^{\perp}\right)^{\perp}$ e dire se X e Y sono in somma diretta.
[$\vec{v}^{\perp} =< (0, 1, 0), (3, 0, -7) >$; $\left(\vec{v}^{\perp}\right)^{\perp} =< (0, 1, 0), (3, 0, 1) >$; non sono in somma diretta.] $\boxed{5}$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sia s la retta

$$s \ : \ \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases},$$

determinare:

(a) le equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra s e l'asse x; [$2x + 5 = 0 = y + z$] $\boxed{4}$

(b) la minima distanza tra le due rette; [$\frac{3\sqrt{2}}{2}$] $\boxed{1}$

(c) le equazioni cartesiane dei piani passanti per l'asse x e tangenti alla sfera di centro C(-1;0;3) e raggio unitario; [$4y \pm \sqrt{2}z = 0$] $\boxed{3}$

(d) un'equazione cartesiana per la superficie ottenuta per rotazione di s attorno all'asse x. [$2x^2 - y^2 - z^2 + 10x + 17 = 0$] $\boxed{4}$

Esercizio 3. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ la conica data dalla seguente equazione:

$$\mathscr{C} \ : \ 2x^2 - y^2 + x + 2y = 0.$$

(a) Classificare la conica dal punto di vista proiettivo e affine. [Iperbole generale] $\boxed{2}$

(b) Determinare le coordinate del centro, le equazioni degli asintoti e degli assi.
[$C(-1/4, 1)$, asintoti: $4\sqrt{2}x \pm 4y + \sqrt{2} \mp 4 = 0$, assi: $x = -1/4, y = 1$] $\boxed{4}$

(c) Costruire un'equazione per il fascio $\mathscr{F}$ di coniche contenente $\mathscr{C}$ e avente come punti base $A(0;2), B(1;-1), O(0;0)O(0;0)$ con molteplicità due.
$[(x+2y)(3x+y-2)+k(2x^2-y^2+x+2y)=0]$ $\boxed{3}$

(d) Determinare le equazioni delle coniche riducibili di $\mathscr{F}$. $[(x+2y)(3x+y-2)=0,$
$(x-2y)(x+y-1)=0]$ $\boxed{2}$